

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$(u_n) \text{ المتتالية المعرفة بـ } u_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$$

1 - أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n < 3$

$$2 \text{ لتكن } (v_n) \text{ متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ب أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

$$3 - (w_n) \text{ المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n : w_n = \frac{3}{u_n} \text{، نضع } S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : w_n = 1 - v_n$

$$ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$$$

ج. أحسب نهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0

، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداولهما معدوم "

"C كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداولهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X



التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases}$$
2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقتها على الترتيب $z_I = 1$ و $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -2 + 2i$.
أ - أنشئ النقط I و A و B
ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$
3. D نقطة لاحقتها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) .
4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$

أ - أكتب العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I . نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x^2 - 1 + \ln x$
 1. احسب نهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$.
 2. ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. احسب $h(1)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.
- II . نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$
 1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
 2. بين انهم من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات.
 3. أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$
ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 4. بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1 - e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثياتها
 5. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .
 6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1 - \frac{\ln(x)}{x} = m$.

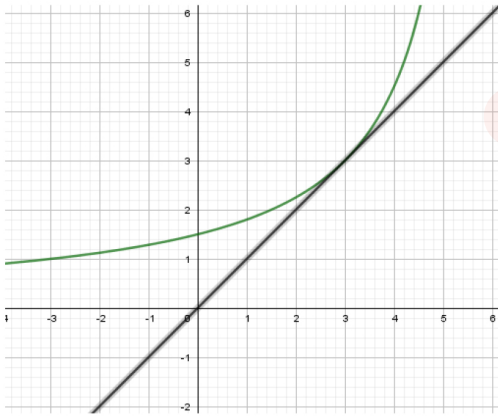
الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty, 6[$ بـ: $f(x) = \frac{9}{6-x}$

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي



المعادلة $y = x$

1. أ- بلبستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون

حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربهما.

2. أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 3$

ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) . هل (u_n) متقاربة؟ برر

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدها الاول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

هـ- احسب بدلالة n المجموعين: $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $s'_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبررا الإجابة .

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$.

(2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0 [6]$ فإن $x \equiv 0 [6]$.

(3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

(4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل

$(4 + 10k; 9 + 24k)$ مع $k \in Z$.

(5) M و N عدنان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : abc و bca على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين

2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

$$أ - بين أن $P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$.$$

ب أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n = 5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب

كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

1) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

(1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على \square

$$II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (e^x - 1)(2 - x)$$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -2$ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب- ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y = x - 2$.

(3) بين ان $f'(x) = e^x \cdot g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} و شكل جدول تغيراتها .

(4) بين ان $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(5) ارسم (Δ) و (C_f) .

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1 = \frac{4u_0}{1+u_0} = \frac{4}{2} = 2$ و $u_2 = \frac{4u_1}{1+u_1} = \frac{4 \times 2}{1+2} = \frac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$:
لدينا $0 < u_0 < 3$ محققة .

نفرض أن $0 < u_n < 3$ صحيحة و نبرهن أن $0 < u_{n+1} < 3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{1+u_n}$

$0 < u_n < 3$ بإضافة 1 نجد $1 < 1+u_n < 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} > \frac{1}{1+u_n} > \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد

$-4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1$ بإضافة 4 نجد $0 < 4 - \frac{4}{1+u_n} < 3$ إذن $0 < u_{n+1} < 3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2. لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right) - 3}{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right)}$ أي أن

$v_{n+1} = \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} = \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 3}{u_n}\right)$ إذن $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2$ أي $v_0 = -2$

ب كتبت v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n$ أي $v_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ و منه $v_n - 1 = -\frac{3}{u_n}$ أي أن $\frac{1}{v_n - 1} = -\frac{u_n}{3}$ إذن $u_n = -\frac{3}{v_n - 1}$ بالتعويض نجد

$u_n = -\frac{3}{\left(\frac{-2}{4^n}\right) - 1}$ أي أن $u_n = \frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n = \lim \left(\frac{3 \times 4^n}{4^n}\right) = 3$.

3. المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع

$$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $w_n = 1 - v_n$ ولدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \text{ بالجمع نجد } w_n + v_n = 1 \text{ و منه } w_n = 1 - v_n \text{ و هو المطلوب.}$$

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$

$$S_n \text{ هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن } S_n = (n+1) - v_0 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right]$$

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

$$\text{ح. حساب نهاية } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right] \right] = 1$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0

، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون" B "الكرتين تحملان رقمين جداولهما معدوم"

C "كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداولهما معدوم"

$$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \text{ و } P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

ب. حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 1,25 \text{ إذن } E(X) = \frac{0 \times 6 + 1 \times 12 + 2 \times 7 + 3 \times 3}{28} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. بتعين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases}$$
 يكافئ أن $2\bar{\alpha} - \alpha = 1 + 6i$ بوضع

$\alpha = x + iy$ نجد $x - 3iy = 1 + 6i$ و منه $\begin{cases} x = 1 \\ -3y = 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ و منه $\alpha = 1 - 2i$ بالتعويض

في معادلة من معادلتني الجملة نجد $1 - 2i + \beta = -1$ إذن $\beta = -2 + 2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقتها على

الترتيب $z_B = -2 + 2i$ و $z_A = 1 - 2i$ و $z_I = 1$

أ- أنشاء النقط I و A و B

ب- بتعين النقطة z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة

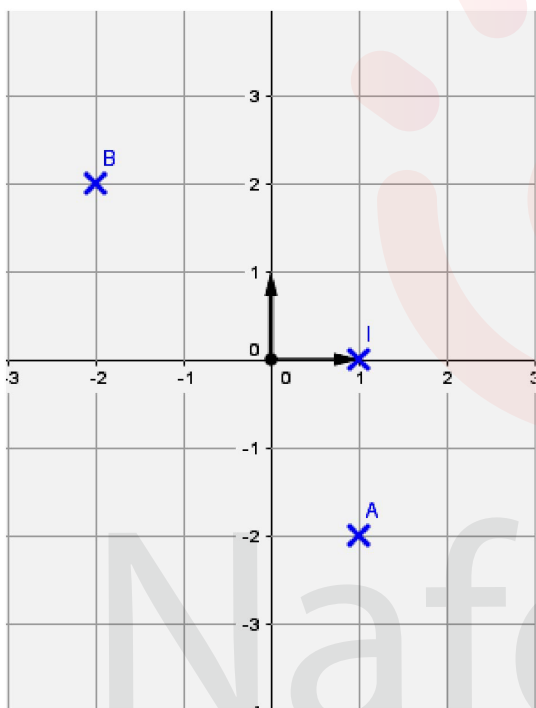
(C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف

القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. نقطة لاحقتها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

كشبه z_D على شكل الجبري :



$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) : $|z_D - z_w| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{4}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2}$ و $|z_A - z_w| = \left| \frac{3}{2} - 2i - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \frac{5}{2}$ و منه محققة

4. نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$

أ - كتب العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$
 يعني أن $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)$ ومنه $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو المطلوب .

ب استنتج أن $z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{3\sqrt{2}}{4}$ لدينا $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ ومنه $z_E = \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

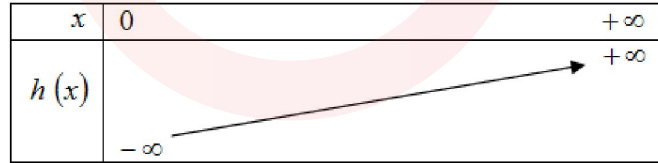
1- نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
 1. حساب النهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$:

النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 - 1 + \ln(x)] = -\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة h على $]0; +\infty[$: $h'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة h متزايدة على $]0; +\infty[$

جدول تغيرات:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$



2. حساب $h(1) = 1^2 - 1 + \ln(1) = 0$:

استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x على المجال $]0; +\infty[$: بما أن الدالة h متزايدة على $]0; +\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1; +\infty[$ و سالبة على المجال $]0; 1]$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$: حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

فسري النتيجة بيانيا المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x = 0$.

2. بين انهم من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

منه $f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln(x)}{x^2}$ و $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ محققة

استنتج اتجاه تغير الدالة f : f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]0; 1]$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

3. أ) إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى

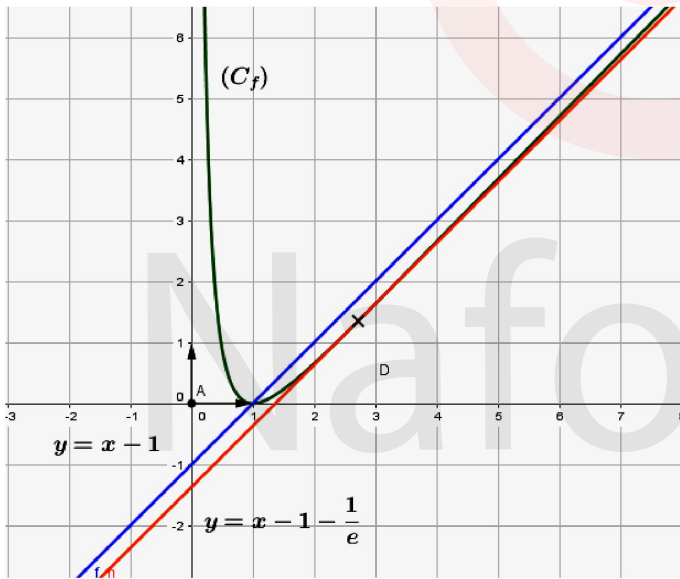
$$(C_f) : \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right] = 0 \text{ و منه محققة.}$$

$$\text{ب) دراسة وضعية } (C_f) \text{ بالنسبة للمستقيم } (\Delta) \text{ ندرس إشارة الفرق } [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]$$

و هو موجب على المجال على المجال $]0; 1[$ أي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .
و سالب على المجال على المجال $]1; +\infty[$ أي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال .
1. إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1 - e^{-1}$ يمس المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيتها : معامل توجيهه هو $f'(x) = 1$ يعني أن تكافئ $\frac{g(x)}{x^2} = 1$ يعني أن $g(x) = x^2$ يكافئ أن

$$\ln(x) = 1 \text{ يكافئ أن } x = e \text{ و منه ف } A(e; f(e)) \text{ أي أن } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

4. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .



5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1 - \frac{\ln(x)}{x} = m$.

يعني أن $x - 1 - \frac{\ln(x)}{x} = x + m$ أي أن $f(x) = x + m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم

$$(\Delta_m): y = x + m$$

لما $m \in \left] -\infty; -1 - \frac{1}{e} \right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m = -1 - \frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد
لما $m \in]-1 - \frac{1}{e}; -1[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين
لما $m \in [-1; +\infty [$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد



Nafouz

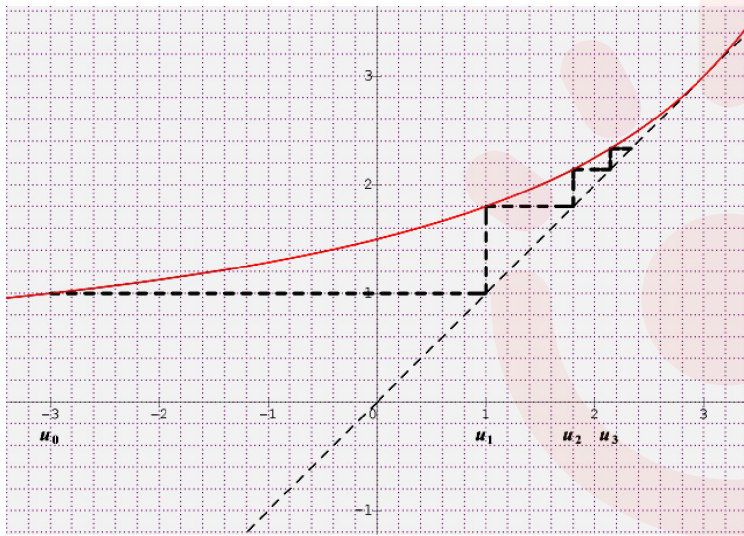
التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty ; 6[$ بـ: $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي

المعادلة $y = x$



1. أ- بلستعمال الرسم السابق نقضي على حامل

محور الفواصل في الشكل المقابل

ب- التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد

3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (C_f)

فهي متقاربة

2. أ- اليره ان بالتراجع أن من أجل كل عدد

طبيعي $n : u_n < 3$

محقة $u_0 < 3$

نفرض أن $u_n < 3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1} < 3$

$u_n < 3$ بالضرب في (-1) نجد $-u_n > -3$ بإضافة 6 نجد $6 - u_n > 3$ بالقلب نجد $\frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3}$ بالضرب في

9 نجد $\frac{9}{6 - u_n} < 3$ أي أن $u_{n+1} < 3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 3$.

ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n$ أي أن $u_{n+1} - u_n = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n}$ يعني أن

$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)^2}{6 - u_n}$ بما أن $u_n < 3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$



أ- البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية : $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{6-u_n}{9}-3} = \frac{1}{\frac{6-u_n-27}{9}} = \frac{9}{6-u_n}$ أي أن $v_{n+1} = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$$v_{n+1} = \frac{6-u_n}{3u_n-9} \text{ بحساب الفرق نجد } v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3}$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}$ إذن $v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n-3}{3u_n-9} = -\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$

$$v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{6} \text{ و حدها الأول } -\frac{1}{3}$$

ب لاتبق عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + nr$ أي $v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n$

استنتج عبارة u_n : $v_n = \frac{1}{u_n-3}$ يعني أن $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$ و منه $u_n = 3 + \frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n}$

$$u_n = \frac{3-6n}{-1-2n} \text{ إذن } u_n = 3 + \frac{6}{-1-2n} \text{ و منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6n}{-2n} \right) = 3 : \text{ حساب}$$

هـ- حساب بدلالة n المجموعين:

المجموع الأول : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ أي $S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}$ أي $S_n = \frac{(n+1)\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}n\right)}{2}$ و منه

$$S_n = -\frac{(n+1)^2}{6} \text{ إذن } S_n = \frac{(n+1)(-1-n)}{6}$$

و المجموع الثاني : $S'_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$ لدينا $u_n = 3 + \frac{1}{v_n}$ و منه $u_n \times v_n = 3v_n + 1$

منه S'_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n = 3S_n + (n+1)$ أي أن

$$S'_n = -\frac{1}{2}(1-n) \cdot (n+1) \text{ أي } S'_n = \left[-\frac{(n+1)}{2} + 1 \right] (n+1) \text{ إذن } S'_n = -3 \frac{(n+1)^2}{6} + (n+1)$$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجملة التالية صحيحة أم خاطئة مبررا الإجابة .

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$ لدينا $2^2 \equiv 1 [3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n} \equiv 1 [3]$ و منه

$$2^{2n} - 1 \equiv 0 [3] \text{ و منه صحيحة.}$$

(2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0 [6]$ فإن $x^2 \equiv 0 [6]$:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$x^2 - x \equiv$	0	0	2	0	0	2	[6]

و منه خاطئة



(3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$[17] x^2 \equiv y^2$ يعني إن $[17] x^2 - y^2 \equiv 0$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و
 $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $[17] x \equiv y$ أو $[17] x \equiv -y$ و
 منه خاطئة .

(4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل
 $(4 + 10k ; 9 + 24k)$ مع $k \in Z$ $12(4 + 10k) - 5(9 + 24) = 12 \times 4 + 120k - 5 \times 9 - 120k$ $k \in Z$ و منه
 $12(4 + 10k) - 5(9 + 24) = 3$ إذن محققة و منه صحيحة

(5) M و N عدنان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : \overline{abc} و \overline{bca} على الترتيب .
 إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $[27] M \equiv 0$ أي أن $[27] 100a + 10b + c \equiv 0$ أي أن
 $[27] M - N \equiv -N$ أي أن $[27] M - N \equiv -100b - 10c - a$

$[27] M - N \equiv -a - 100b - 10c$ و $[27] -999 \equiv 0$ أي أن و منه $[27] M - N \equiv -1000a - 100b - 10c$

أي $[27] M - N \equiv -10(100a + 10b + c)$ أي أن $[27] M - N \equiv -10M$ و $[27] M \equiv 0$ إذن

$[27] M - N \equiv 0$ صحيحة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

$$1. \text{ احتمال سحب كرتين بيضاوين : } P(A) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{\frac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$$

2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

$$\text{أ - بين أن } P(n) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{(n+7)(n+6)} \therefore P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

$$\text{ب حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \right) = 1$$

بفسري النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .
- أ . قيم المتغير العشوائي X هي $50, 20, 10, -10, -20, -60$.
- n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء
- ب. تبين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

x_i	-60	-20	-10	10	20	50
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$

$$E(X) = \frac{-60 \times 3 - 20 \times 12 - 10 \times 6 + 10 \times 15 + 20 \times 20 + 50 \times 10}{66} = \frac{570}{66} = \frac{95}{11}$$

حساب أمله الرياضياتي : $\frac{570}{66} = \frac{95}{11}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

1. حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ بالتزايد المقارن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g : $g'(x) = -1 - e^{-x}$ سالبة تماما

و منه الدالة g متناقصة على المجال \mathbb{R} .

جدول تغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$: $g(1,27) = 0,010$ و

$g(1,28) = -0,0001$ بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على \mathbb{R} حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$

استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	-

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (e^x - 1)(2 - x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والتهجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(2-x)] = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x.e^x = -\infty$$

2. إثبات أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-x] = -2$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x.(2-x)-2] = -2$ لأن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x.(2-x)] = 0 \quad \text{التزايد المقارن .}$$

استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-x] = -2$

فإن $y = x - 2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y = x - 2$:

$$[f(x) - x + 2] = e^x(2-x) \quad \text{إشارة الفرق من إشارة } (2-x)$$

و المستقيم (Δ) و (C_f) المنحني يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $f(x)-y$		0	
		+	-
الوضع:		(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)
		يتقاطعان (Δ) و (C_f)	

3. إثبات إن $f'(x) = e^x.g(x)$: $f'(x) = e^x(2-x) - (e^x - 1)$ يعني أن $f(x) = (e^x - 1)(2-x)$ أي

$$f'(x) = e^x g(x) \quad \text{إن} \quad f'(x) = e^x [-x + 1 + e^{-x}] \quad \text{منه} \quad f'(x) = e^x [(2-x) - (1 - e^{-x})]$$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} : $f'(x) = e^x g(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة

على $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		$f(\alpha)$	
	$-\infty$		$-\infty$

جدول تغيرات :

4. إثبات أن $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$: $g(\alpha) = 0$ يعني $-\alpha + 1 + e^{-\alpha} = 0$ يعني أن $e^{-\alpha} = \alpha - 1$

$$f(\alpha) = (e^\alpha - 1)(2-\alpha) \quad \text{و} \quad e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{بالتعويض نجد} \quad f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha-1} - 1\right) \cdot (2-\alpha) \quad \text{و منه}$$

$$f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1} \quad \text{إن} \quad f(\alpha) = \frac{(2-\alpha) \cdot (2-\alpha)}{\alpha-1}$$

استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$: $1,27 < \alpha < 1,28$ و منه $0,27 < \alpha - 1 < 0,28$ بالقلب نجد

$$\frac{1}{0,28} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,27} \dots \dots \dots (1)$$



و $1,27 < \alpha < 1,28$ بإضافة -2 يعني $-0,72 < \alpha - 2 < -0,73$ بالتربيع نجد

$$0,72^2 < (\alpha - 2)^2 < 0,73^2 \dots \dots \dots (2)$$

بضرب (1) و (2) نجد $\frac{0,72^2}{0,28} < \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1} < \frac{0,73^2}{0,27}$ أي أن $1,85 < f(\alpha) \leq 1,97$

5. رسم (Δ) و (C_f)

